Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Ein Verfahren zur Bestimmung des Zinsfusses bei Leib- und Zeitrenten

Es sei der Barwert einer Leibrente $\ddot{a}_{x\overline{n}|}(i)$ oder einer Zeitrente $\ddot{a}_{\overline{n}|}(i)$ *numerisch gegeben* und der Berechnungszinsfuss i *gesucht*. Sofern für einen Basiszinsfuss i_0 die Rentenbarwerte und das System der Kommutationszahlen bekannt sind, was man praktisch immer als erfüllt annehmen darf, so lässt sich i folgendermassen bestimmen.

Wir setzen

$$v = \frac{1}{1+i} = v_0\,(1+\varepsilon), \tag{1}$$

wobei

$$v_0 = \frac{1}{1+i_0}$$

ist, und entwickeln in der Beziehung

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}(i) = \sum_{t=0}^{n-1} (1+\varepsilon)^t \frac{D_{x+t}(i_0)}{D_x(i_0)} \tag{2}$$

$(1+\varepsilon)^t$ in die Binomialreihe. Wenn mit

$$\Phi_0^{(r)} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+r}{r} \frac{D_{x+t}(i_0)}{D_x)i_0)} \tag{3}$$

bezeichnet wird, also auch

$$\Phi_0^{(r)} = \sum_{\tau=0}^{n-1} \Phi_\tau^{(r-1)} \tag{4}$$

gilt, ferner abkürzend

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \Phi_0^{(0)} = \ddot{a}_{x\overline{n}|}(i_0),\\ M_1 &= \Phi_0^{(1)} - \Phi_0^{(0)},\\ M_2 &= 2!\left(\Phi_0^{(2)} - 2\,\Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(0)}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} ; \tag{5}$$

eingeführt wird, kann für (2) geschrieben werden:

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}(i) = \ddot{a}_{x\overline{n}|}(i_0) + \varepsilon\,M_1\left(1 + \frac{\varepsilon\,M_2}{2!\,M_1} + \frac{\varepsilon^2\,M_3}{3!\,M_1} + \cdots\right)$$

$$\sim \ddot{a}_{x\overline{n}|}(i_0) + \frac{\varepsilon\,M_1}{1 - \frac{\varepsilon\,M_2}{2\,M_1}}. \tag{6}$$

Sei noch

$$\Delta = \ddot{a}_{x\overline{n}|}(i) - \ddot{a}_{x\overline{n}|}(i_0);$$

dann wird

$$\varepsilon = \frac{2\,\Delta M_1}{\Delta M_2 + 2\,M_1^2}, \tag{7}$$

womit auch i bestimmt ist.

Die Grössen M_1 und M_2 sind durch die Kommutationszahlen darzustellen; es ist (wobei die Kommutationszahlen für den Zinsfuss i_0 zu nehmen sind)

$$M_1 = \frac{1}{D_x}\left[S_x - S_{x+n} - N_x - (n-1)\,N_{x+n}\right] \tag{8}$$

und

$$M_2 = \frac{1}{D_x}\Big[2\,S_x^{(2)} - 2\,S_{x+n}^{(2)} - 4\,S_x - (2\,n-4)\,S_{x+n} + 2\,N_x - (n^2 - 3\,n + 2)\,N_{x+n}\Big]. \tag{9}$$

Für die Zeitrente gestaltet sich die Ableitung formal gleich. Man hat für M_1 und M_2 die Ausdrücke

$$M_1 = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}(i_0) - n\,v_0^n}{1 - v_0} \tag{10}$$

und

$$M_2 = \frac{2\,M_1}{i_0} - \frac{v_0^n\,n\,(n-1)}{1 - v_0}. \tag{11}$$

Für $i_0 = 0{,}03$ ergeben sich zum Beispiel die folgenden Abweichungen vom genauen Wert, wobei für Leibrenten $i < i_0$ und für Zeitrenten $i > i_0$ angenommen ist:

x	n	Leibrente (Sterbetafel SM 1939/44)		
		i genau	i nach (7)	relativer Fehler
		%	%	‰
20	40	2,0000	2,0025	1,2
30	30	2,0000	2,0019	1,0
40	20	2,0000	2,0007	0,4

x	n	Zeitrente		
		i genau	i nach (7)	relativer Fehler
		%	%	‰
–	40	4,0000	3,9972	0,7
–	30	4,0000	3,9984	0,4
–	20	4,0000	3,9992	0,2

E. ZWINGGI

Versicherungstechnische Abteilung der Mathematischen Anstalt der Universität Basel, den 15. März 1952.

Summary

A method for the calculation of the rate of interest is represented, when the value of the life annuity or the value of the annuity-certain is given numerically.

Reduction of Cryptopine with Lithium Aluminium Hydride

Owing to steric hindrance, the reduction of the alkaloid cryptopine (I) to dihydrocryptopine (II) is achieved with